令和４年度　教科専門試験　高等学校・特別支援学校（数学）　解答例

受験校種	高・特	教科科目	数学	受験番号						得点	30 点

1

15 点

（1）方程式を変形して

$(x-3)(y-3)=9$

これを満たす整数 $x-3$, $y-3$ の組は，$x \geqq y > 0$ より，$x-3 \geqq y-3 > -3$ なので

$(x-3, y-3)=(9, 1), (3, 3)$

よって

$(x, y)=(12, 4), (6, 6)$

（2）円 C は $(x+1)^2+(y-2)^2=9$ より，中心は $(-1, 2)$，半径は 3 である。

15 点

また，直線 l は $2x-y+k=0$ と変形できる。

よって，円 C の中心と l の距離は

$$\frac{|2\cdot(-1)-2+k|}{\sqrt{2^2+(-1)^2}}=\frac{|-4+k|}{\sqrt{5}}$$

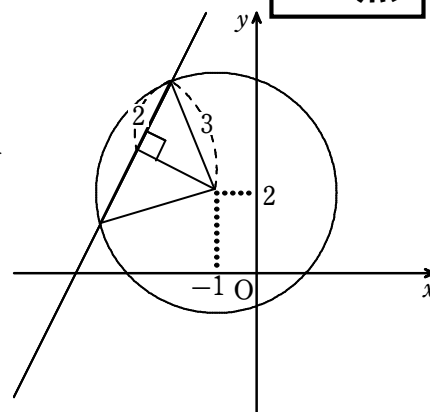
円 C によって切り取られてできる線分の長さが 4 となるとき

円 C の中心と直線の距離は $\sqrt{3^2-2^2}=\sqrt{5}$ なので

$$\frac{|-4+k|}{\sqrt{5}}=\sqrt{5}$$

これを解くと　$|-4+k|=5$

すなわち　$-4+k=\pm 5$

したがって　$k=-1, 9$

令和４年度　教科専門試験　高等学校・特別支援学校（数学）　解答例

受験校種	高・特	教科科目	数学	受験番号						得点	30 点

2

（1）2 回目の試行において，袋から取り出したりんごが赤りんごであるのは

[1] 1 回目の試行で袋から赤りんごを取り出し，2 回目の試行で赤りんご 4 個と青りんご 4 個が入った袋から赤りんごを取り出すとき

[2] 1 回目の試行で袋から青りんごを取り出し，2 回目の試行で赤りんご 3 個と青りんご 5 個が入った袋から赤りんごを取り出すとき

の 2 つの場合があり，これらは互いに排反である。

15 点

よって，求める確率は　$\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{8}+\frac{4}{7}\cdot\frac{3}{8}=\frac{3}{7}$

（2）かごに赤りんごと青りんごが 1 個ずつ残るのは，3 回試行を繰り返し，袋から赤りんごを 1 回，青りんごを 2 回取り出す場合であり，それは ${}_3C_1$ 通りある。

例えば，1 回目の試行で袋から赤りんごを取り出し，2 回目，3 回目の試行で袋から青りんごを取り出す確率は

15 点

$\frac{3}{7}\cdot\frac{4}{8}\cdot\frac{5}{9}=\frac{5}{42}$　……①

青りんご，赤りんご，青りんごの順で取り出す場合と，青りんご，青りんご，赤りんごの順で取り出す場合も確率は ① と同様となる。

したがって，求める確率は

${}_3C_1\times\frac{5}{42}=\frac{5}{14}$

令和４年度　教科専門試験　高等学校・特別支援学校（数学）　解答例

受験校種	高・特	教科科目	数学	受験番号						得点	40 点

3

（1）余弦定理より $\cos A=\dfrac{3^2+7^2-8^2}{2\cdot 3\cdot 7}=-\dfrac{1}{7}$

10 点

よって，$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=3\cdot 7\cdot\left(-\dfrac{1}{7}\right)=-3$

（2）$\overrightarrow{AH}=k\overrightarrow{AP}$ （k は実数）より

$$\overrightarrow{BH}=\overrightarrow{AH}-\overrightarrow{AB}=k\overrightarrow{AP}-\overrightarrow{AB}$$

10 点

$$=k\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}-\overrightarrow{AB}$$

$$=\frac{(3k-4)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}}{4}$$

$\overrightarrow{BH}\perp\overrightarrow{AP}$ より $\overrightarrow{BH}\cdot\overrightarrow{AP}=0$ なので

$$\frac{(3k-4)\overrightarrow{AB}+k\overrightarrow{AC}}{4}\cdot\frac{3\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{AC}}{4}=0$$

$$3(3k-4)\left|\overrightarrow{AB}\right|^2+\{3k+(3k-4)\}\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}+k\left|\overrightarrow{AC}\right|^2=0$$

よって，$3(3k-4)\cdot 3^2+\{3k+(3k-4)\}\cdot(-3)+k\cdot 7^2=0$

ゆえに，$k=\dfrac{6}{7}$

（3）（2）より，$\overrightarrow{BH}=-\dfrac{5}{14}\overrightarrow{AB}+\dfrac{3}{14}\overrightarrow{AC}$

点 B の直線 AP に関する対称点が D だから

10 点

$$\overrightarrow{AD}=\overrightarrow{AB}+2\overrightarrow{BH}$$

$$=\frac{2}{7}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{7}\overrightarrow{AC}$$

（4）$\overrightarrow{AD}=\dfrac{5}{7}\cdot\dfrac{2\overrightarrow{AB}+3\overrightarrow{AC}}{5}$ だから

点 Q は線分 BC を 3:2 に内分する点，点 D は線分 AQ を5:2 に内分する点である。

10 点

また，BP:PC=1:3，BQ:QC=3:2 より，BP:PQ:QC=5:7:8 であるから

$$\triangle\mathrm{DPQ}=\frac{2}{7}\cdot\frac{7}{20}\triangle\mathrm{ABC}=\frac{1}{10}\triangle\mathrm{ABC}$$

ここで，$\triangle\mathrm{ABC}=\dfrac{1}{2}\cdot 3\cdot 7\cdot\sqrt{1-\left(-\dfrac{1}{7}\right)^2}=6\sqrt{3}$ より

$$\triangle\mathrm{DPQ}=\frac{3\sqrt{3}}{5}$$

令和４年度　教科専門試験　高等学校（数学）　解答例

受験校種	高	教科科目	数学	受験番号						得点	30 点

4

（１）$x^2+5x-6>0$ より

$(x+6)(x-1)>0$

$x<-6$，$1<x$ ……③

$|x+1|<2a$，$a>0$ より

$-2a<x+1<2a$

$-1-2a<x<-1+2a$ ……④

③と④をともに満たす x が存在する条件は

$-1-2a<-6$ または $1<-1+2a$

すなわち，$\frac{5}{2}<a$ または $1<a$ である。

よって，求める正の定数 a の値の範囲は $a>1$ である。

15 点

（２）$y=4\sin x+3\cos x=5\sin(x+\alpha)$

ただし，α は次の式を満たす角である。

$$\sin\alpha=\frac{3}{5},\ \cos\alpha=\frac{4}{5}\left(0<\alpha<\frac{\pi}{2}\right)$$

$\frac{\pi}{2}\leqq x\leqq\pi$ より，$\frac{\pi}{2}+\alpha\leqq x+\alpha\leqq\pi+\alpha$ であるから

$$-\frac{3}{5}\leqq\sin(x+\alpha)\leqq\frac{4}{5}$$

よって，$-3\leqq y\leqq 4$

ゆえに，この関数の最大値は 4，最小値は -3 である。

15 点

令和４年度　教科専門試験　高等学校（数学）　解答例

受験校種	高	教科科目	数学	受験番号						得点	30 点

5

（１）$1 \leqq x \leqq 2^{10}$ のとき，格子点は

$(1, 0)$，$(2^1, 1)$，$(2^2, 2)$，…，$(2^{10}, 10)$

よって，求める格子点の個数は 11 個

10 点

（２）直線 $y=k$ と曲線 $y=\log_2 x$ の交点の x 座標は 2^k

よって，$k=0, 1, 2, 3, \cdots\cdots, 10$ に対して

直線 $y=k$ 上で P の内部および境界線上にある格子点の個数は

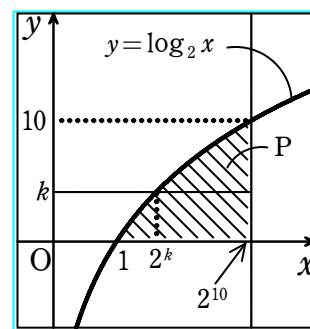
$2^{10}-2^k+1$ 個であるから

求める格子点の個数は全部で

20 点

$$\sum_{k=0}^{10}(2^{10}-2^k+1)=2^{10}+\sum_{k=1}^{10}(2^{10}+1-2^k)=2^{10}+10\cdot(2^{10}+1)-\frac{2(2^{10}-1)}{2-1}$$

$$=9\cdot 2^{10}+12=9228$$

よって，9228 個

令和４年度　教科専門試験　高等学校（数学）　解答例

受験校種	高	教科科目	数学	受験番号						得点	40 点

6

（1）$f(x)=\dfrac{x-a}{e^x}$ より $f'(x)=-\dfrac{x-(a+1)}{e^x}$

10 点

$x=t$ における接線の方程式は　$y=-\dfrac{t-(a+1)}{e^t}(x-t)+\dfrac{t-a}{e^t}$

これが原点を通るとき　$\dfrac{t^2-at-a}{e^t}=0$　　よって，$t^2-at-a=0$ ……①

原点を通る接線をただ１つもつとき，t の２次方程式①はただ１つの実数解，すなわち重解をもつから，①の判別式を D とすると，$D=a^2+4a=a(a+4)$ において

$D=0$ ，$a\fallingdotseq 0$ より，$a=-4$

（2）（1）より，$f(x)=\dfrac{x+4}{e^x}$，$f'(x)=-\dfrac{x+3}{e^x}$

15 点

よって，$f(x)$ の増減表は

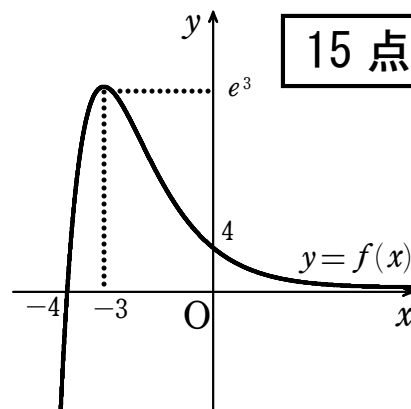
x	$\cdots$	-3	$\cdots$
$f'(x)$	$+$	0	$-$
$f(x)$	↗	極大	↘

ここで，$f(-3)=e^3$ より

$x=-3$ のとき，極大値 e^3

また，$\displaystyle\lim_{x\to\infty}\frac{x+4}{e^x}=0$，$\displaystyle\lim_{x\to-\infty}\frac{x+4}{e^x}=-\infty$　よりグラフは右図の通り。

（3）方程式①の解は $t=-2$

15 点

よって，原点を通る接線の方程式は

$y=-\{-2-(-4+1)\}e^2(x+2)+(-2+4)e^2$

ゆえに，$y=-e^2x$

接点の座標は，$(-2,\ 2e^2)$

したがって，求める面積 S は

$$S=\int_{-2}^{0}\{(x+4)e^{-x}-(-e^2x)\}dx$$

$$=\Big[-(x+4)e^{-x}\Big]_{-2}^{0}+\int_{-2}^{0}e^{-x}dx+\left[\frac{e^2}{2}x^2\right]_{-2}^{0}$$

$$=-4+2e^2-\Big[e^{-x}\Big]_{-2}^{0}-2e^2$$

$$=e^2-5$$